

Compito di Matematica per la Fisica

Silvia Penati, Carlo Oleari

21/6/2012

1. Data la funzione

$$f(z) = \frac{\tan(\alpha z)}{2 \cos^2(\pi z) - 1}$$

con α parametro reale,

- indicarne gli zeri e le singolarità, discutendone la dipendenza dai possibili valori di α . Non dimenticare la discussione del punto all'infinito.
- Per $\alpha = 2\pi$, calcolare l'integrale

$$I = \int_{\sigma} dz f(z)$$

dove σ è la circonferenza di raggio $1/4$ e centro in $z = -1/4$.

2. Date le funzioni

$$x \log |x|, \quad \frac{x}{4+x^2}, \quad \frac{1}{4+x^2}$$

dire per quali di esse esiste la trasformata di Fourier, giustificando la risposta, e in caso affermativo, calcolarla.

3. Calcolare, utilizzando la teoria dei residui, l'integrale (prestare attenzione agli estremi di integrazione)

$$I = \int_0^{3\pi} d\theta \frac{1}{3i + \cos \theta}$$

4. Dato uno spazio di Hilbert \mathcal{H} e un suo s.o.n.c. $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, si consideri l'operatore $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

$$Tx = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n (u_n | x) u_n$$

con $\{\lambda_n\}$ una successione di numeri complessi.

- Verificare che se $\{\lambda_n\} \in l^\infty(\mathbb{C})$, allora T è ben definito e continuo.
- Calcolarne la norma.
- Discutere se esiste l'operatore aggiunto e, nel caso, determinarlo.
- Determinare autovalori e autofunzioni di T .

5. Calcolare i primi tre coefficienti dello sviluppo della funzione

$$y = \cos x$$

sui polinomi di Hermite. Si ricorda che i polinomi di Hermite formano una base su $L^2(\mathbb{R}, \exp(-x^2) dx)$ e che $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$ e $H_2(x) = 4x^2 - 1$.